INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE APPLIQUEE ET DE PROSPECTION MINIERE - NANCY -

- SESSION 1993 -

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Avertissement : Le problème comporte deux parties **indépendantes.**

Pour la partie I, de caractère analytique, les calculs doivent être entièrement explicités, les expressions demandées clairement dégagées, sous une forme simplifiée au maximum.

Pour la partie II, de caractère ensembliste et probabiliste, les raisonnements doivent être clairement et complètement rédigés ; après avoir traité la question 1), le candidat pourra traiter les questions 7) à 9), en admettant le résultat de la question 6), à condition de le signaler explicitement.

La qualité de rédaction sera appréciée.

Partie I

1) Pour n entier positif ou nul, et pour x dans l'intervalle [-1,+1], on pose

$$P_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc}\cos x).$$

a) Calculer P_0, P_1 et P_2.

b) Etablir, pour $n \geq 1$, la relation $P_{n+1}(x) = x\,P_n(x) + \frac{x^2-1}{n}\,P_n'(x)$.

c) En déduire que P_n est une fonction polynôme, dont on précisera le degré, ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.

2) a) Rappeler le développement en série entière de la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, et expliquer pourquoi son rayon de convergence vaut 1.

Pour z complexe de module $|z|$ inférieur à 1, on désigne par $\frac{1}{\sqrt{1-z}}$ la somme de la série entière obtenue.

b) En identifiant les développements en série entière des fonctions $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ montrer que $\sum_{k=0}^{k=n} C_{2k}^{k}\, C_{2(n-k)}^{n-k} = 2^{2n}$ pour tout entier positif n.

c) Expliquer pourquoi la relation $\frac{1}{1-z} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-z}}\right)^2$ est valable pour tout complexe z de module $|z| < 1$.

3) a) A θ réel fixé, écrire les développements en série entière des fonctions

$$f(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho e^{i\theta}}} \qquad \text{et} \qquad g(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho e^{-i\theta}}}$$

b) Montrer que la fonction $f \times g$ possède, pour ρ dans l'intervalle $[0,1[$, un développement de la forme

$$(f \times g)(\rho) = \sum_{n \geq 0} C_n(\theta)\rho^n$$

où $C_n(\theta) = P_n^*(\cos\theta)$, avec P_n^* polynôme à coefficients réels de degré n.

c) Expliquer pourquoi la fonction

$$h(\rho) = \frac{1}{\sqrt{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}}$$

possède le même développement que la fonction $(f \times g)$.

4) Montrer que $|P_n^*(\cos\theta)| \leq 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Pour tout couple d'entiers positifs ou nuls (m,n), on pose

$$I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m(\varphi)\sin^n(\varphi)d\varphi.$$

a) Etablir une relation de récurrence entre $I_{m,n}$ et $I_{m+2,n-2}$ pour $n \geq 2$ et $m \geq 0$.

b) Donner l'expression de $I_{2p,2q}$ pour p et $q \in \mathbb{N}$.

6) a) Montrer que, pour tous θ et φ dans $\mathbb{R}$

$$\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi = \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{i\theta} + \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{-i\theta}.$$

b) Etablir la relation

$$P_n^*(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n d\varphi.$$

7) a) Vérifier que

$$(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\varphi}\right).$$

b) En déduire que : $P_n^*(x) = \sum_{k=0}^{k=n} (C_n^k)^2\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k$.

8) Montrer que : $P_n^*(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)$.

Partie II

Soit $(X_k)_{k\leq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes sur l'espace de probabilité (Ω,A,P), à valeurs dans $\{-1,+1\}$, et de même loi, donnée par

$$P(\{X=-1\}) = P(\{X=+1\}) = \frac{1}{2}.$$

On pose : $S_0 = 0$ et $S_n = X_1+...+X_n$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit les variables aléatoires : $Y_n = 1+X_n$

$$\Sigma_n = Y_1+...+Y_n .$$

a) Déterminer la fonction générative de la variable aléatoire Σ_n.
b) En déduire la loi de la variable aléatoire S_n.

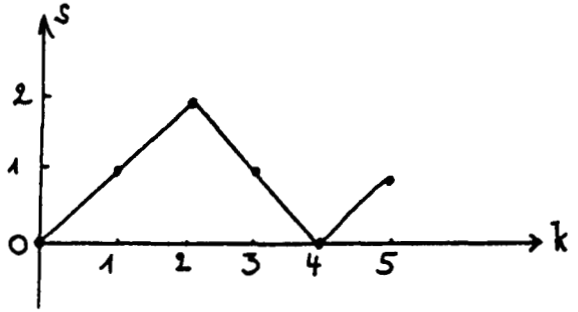
Etant donné un entier n positif, on considère les applications suivantes :

$$\chi_n : \begin{cases} \Omega \to \Omega_n = \{-1,+1\}^n \\ \omega \to (X_k(\omega))_{k=1}^{k=n} = (X_1(\omega),...,X_n(\omega)) \end{cases} ; \Phi_n : \begin{cases} \Omega_n \to \mathfrak{T}_n = \Phi_n(\Omega_n) \\ x = (x_k)_{k=1}^{k=n} = (x_1,...,x_n) \to \Phi_n(x) \end{cases}$$

où $\Phi_n(x)$ est la ligne polygonale du plan qui joint les points de coordonnées (k,s_k) pour $k = 0,1,...,n$ avec

$$s_0 = 0 \qquad s_k = x_1+...+x_k \text{ pour } k = 1,2,...,n.$$

Par exemple, $\Phi_5((1,1,-1,-1,1))$ est la ligne polygonale suivante



2) a) Montrer que Φ_n est une bijection de Ω_n sur $\mathfrak{T}_n = \Phi_n(\Omega_n)$.
b) Que vaut le cardinal de l'ensemble Ω_n ? De l'ensemble $\mathfrak{T}_n$?
c) Déterminer la loi de la variable aléatoire χ_n.
d) Expliquer pourquoi on a : $P(\{\chi_n \in A\}) = \frac{1}{2^n}$ Card(A) pour toute partie A dans Ω_n.

3) Déterminer le nombre d'éléments de $\mathfrak{T}_n$ qui aboutissent au point de coordonnées (n,r), avec r entier donné.

4) Pour n entier positif, soit $\tilde{\Omega}_{2n-1} = \{x = (x_k)_{k=1}^{k=2n-1} \in \Omega_{2n-1} / x_1 = 1, s_{2n-1} = 1$ et il existe $p \in \{2,...,2n-2\}$ tel que $s_2 > 0,...,s_{p-1} > 0, s_p = 0\}$.
On considère l'application

$$\Psi_{2n-1} : \begin{cases} \tilde{\Omega}_{2n-1} \to \Omega_{2n-1} \text{ où } x^* = (-x_1,-x_2,...,-x_{p-1},-x_p,x_{p+1},...,x_{2n-1}). \\ x \to x^* \end{cases}$$

L'application précédente permet d'associer à toute ligne polygonale L de $\mathfrak{T}_{2n-1}$ qui joint les points A(1,1) et B(2n-1,1), et qui touche l'axe horizontal, une ligne polygonale L^* de $\mathfrak{T}_{2n-1}$ qui joint A'(1,-1) et B(2n-1,1) : expliquer pourquoi il existe autant de lignes L, que de lignes L^*.

5) a) Montrer que S_n ne peut s'annuler que si n est pair.
b) Calculer le nombre de lignes polygonales de $\mathfrak{T}_{2n}$ qui joignent A(1,1) et B(2n-1,1), et qui restent au-dessus de l'axe horizontal.

6) a) Montrer que

$$P(\{S_1 > 0,...,S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0\}) = \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{2(2n-1)} C_{2n}^n .$$

b) Expliquer pourquoi

$$P(\{S_1 \times S_2 \times ... \times S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0\}) = 2 \times P(\{S_1 > 0,...,S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0\}).$$

Soit $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega / \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_{2n}(\omega) = 0\}$. Pour ω dans Ω_1, on pose

$$\tau(\omega) = \inf\{2n/n \in \mathbb{N}^* \text{ et } S_{2n}(\omega) = 0\}$$

définissant ainsi une application

$$\tau : \begin{cases} \Omega_1 \to \mathbb{N}^* \\ \omega \to \tau(\omega) \end{cases} .$$

7) a) Calculer $p_{2n} = P(\{\tau = 2n\})$.
b) Expliquer pourquoi la série de terme général p_{2n} est convergente.

8) a) Rappeler le développement en série entière de la fonction $\sqrt{1+x}$, en précisant son rayon de convergence.
b) Montrer que la série obtenue converge pour $x = -1$.

9) a) En admettant que $\sqrt{1+x}$ est égale à son développement pour $x = -1$, calculer $\sum_{n\geq 1} p_{2n}$.
b) Interpréter le résultat obtenu.